Kreativitätsförderung im Mathematikunterricht

Günter Hanisch

1. Kreativität und Mathematik

Leider ist die theoretische Diskussion um den Begriff der Kreativität nach wie vor chaotisch, und es gibt eine Vielzahl von Definitionsversuchen. Hier wird als Arbeitsdefinition die von PREISER (1976, S.5) gegebene verwendet.

Demnach wird eine Idee in einem sozialen System als kreativ akzeptiert, wenn sie in einer bestimmten Situation neu ist oder neuartige Elemente enthält und wenn ein sinnvoller Beitrag zu einer Problemlösung gesehen wird.

Geht man die Literatur bezüglich Schule und Kreativität durch, so findet man im allgemeinen die Meinung vertreten, daß die Schule kreativitätsfeindlich sei. So führen SCHIER und Loddenkemper (1980, S.20) aus:"Der schulische Unterricht zeichnet sich durch hierarchische, zur Anpassung zwingende Kommunikationsstrukturen, durch Leistungs- und Konkurrenzdruck und durch eine - die soziale Dimension des Lernens vernachlässigende - nur auf Kognition zielende Ausrichtung des Lernens aus. Er bewirkt damit beim Schüler u.a.Angst, Abhängigkeit, Fremdbestimmung und konformes Denken, während Selbstbestimmung, Selbstentfaltung, divergentes Denken, Neugier und Originalität blockiert werden." Man findet Zitate wie "Die Kreativitätsfeindschaft der Schule" (S.12) und anderes mehr. Weiters fällt auf, daß die Vorschläge zu einer Kreativitätsförderung vor allem im musischen und bildnerischen Bereich erfolgen, der Mathematikunterricht hingegen ausgeklammert ist.

Man scheint daher der Meinung zu sein, daß Kreativität und Mathematik zwei einander ausschließende Begriffe sind. Was kann der Grund dafür sein?

Betrachtet man kreatives und intelligentes Handeln als Unterform des Problemlösens, so kann man nach REITMANN (zitiert nach Krause, 1977),S.39) Probleme dadurch klassifizieren, daß man die Präzision des Anfangs- und Endzustandes eines Problems angibt:

		Endzustand	
		offen	geschlossen
Anfangs-situation	offen	kreative Pr.	
	geschlossen		intelligente Pr.

Nun sind die Aufgaben, die im Mathematikunterricht gestellt werden, fast ausnahmslos der Art, daß sowohl Anfangs- als auch Endzustand wohldefiniert sind. Diese fördern also vor allem das konvergente Denken im Sinne von GUILFORD. Divergentes Denken, das einen wesentlichen Bestandteil der Kreativität bildet, wird dabei vernachlässigt. Weiters fordert Mathematik durch seine strengen Regeln, die kein Abweichen erlauben, starke Konformität, was ebenfalls für die Kreativität hinderlich ist. Ungewöhnliche, originelle Ideen haben da keinen Platz, $(a+b)^2$ ist immer $a^2+2ab+b^2$, und der pythagoräische Lehrsatz gilt nach wie vor nur für rechtwinkelige Dreiecke. Und solche Beziehungen werden gar noch gepaukt und gedrillt, wo es doch "hemmend auf die Entwicklung der Kreativität wirkt, wenn im Unterricht hauptsächlich Drill- und Paukmethoden zum Einsatz kommen." (Miller, 1957, zitiert nach MIETZEL, 1975, S.282).

Nach all diesen Begründungen für die Kreativitätsfeindlichkeit der Mathematik taucht die Frage auf: "Von wo kommen die neuen Ideen in der Mathematik?" - "Wieso ist dort Fortschritt möglich?" - Doch nicht etwa von Mathematikern ?!

2. Der kreative Prozeß

Um oben gestellter Frage nachzugehen, wird nun untersucht, wie sich Kreativität im einzelnenIndividuum abspielt, und wie sich dieser Prozeß fördern läßt.

In Anlehnung an KONECNY (1978, S.84) läßt sich dieser gliedern in:

1. Vorbereitung:

   Das selbständige spontane Entdecken verborgener Probleme gehört zum integralen Bestandteil kreativer Fähigkeiten. Problemwahrnehmung ist die Folge einer unvoreingenommenen, freien Auseinandersetzung mit der Umwelt und mit den eigenen Bedürfnissen. Äußere Probleme können durch logische oder theoretische Widersprüche, kognitive Dissonanzen, vorgegebene Aufgaben oder gesellschaftliche Bedürfnisse entstehen. Innere Probleme sind Bedürfnisse, Motive und sonstige Spannungszustände.

Aus der Umwelt und aus dem Gedächtnis wird eine Vielfalt von problemrelevanten Informationen zusammengetragen, wobei die Informationsauswahl nicht zu eng begrenzt sein soll, damit neuartige Lösungsmöglichkeiten möglich sind.

2. Inkubation/Hypothesenbildung:
Mit den gesammelten Informationen und den analysierten Problemaspekten werden nunmehr verschiedene Kombinationen durchgespielt. Dabei kann man einen "organisierten" und einen "inspirierten Zugang" unterscheiden. Beim organisierten Zugang werden bewußt und nach rationalen Kriterien Assoziationen zum Problem zusammengestellt und Alternativen gegeneinander abgewogen. Es werden also Hypothesen zur Problemlösung aufgestellt. Beim inspirierten Zugang werden die Assoziationen überwiegend im Unbewußten behandelt, kombiniert, erweitert und umgestellt. Dabei kommt es aber zu keinem chaotischen Durcheinander, sondern in diesem Primärprozeß werden parallel "grob geformte Gedanken oder Ideen konstruiert" (Neisser, 1974, S.380), die nur in verschwommener Weise bewußt sind. In Analogie zu der Zeit zwischen Infektion und Ausbruch einer Krankheit spricht man hier von Inkubation.

3. Illumination/Synthese:
Die Inkubationsphase endet häufig mit einem schlagartigen "Einfall" (Illumination). Die scheinbar zusammenhanglosen kognitiven Elemente bekommen eine neue Struktur oder "Gestalt"; die neue Ordnung ermöglicht eine Integration der relevanten Informationen und gleichzeitg eine Lösung des Problems. Die Lösungsfindung durch Umstrukturierung, durch Bildung einer neuen, harmonischen Gestalt aus den gegebenen Elementen, wird von allen Gestaltpsychologen als wesentliches Kennzeichen des Problemlösungsprozesses bezeichnet. Typische Bezeichnungen für diese Phase sind "Fulmination"(POPPER), "Aha-Erlebnis" (BÜHLER) oder "Heureka-Erlebnis" (nach ARCHIMEDES). Neisser erklärt diese Phase dadurch, daß eine bestimmte Gedankenkonfiguration besondere Aufmerksamkeit erlangt hat und nun seriell durch den Sekundärprozeß weiterverarbeitet wird. Nach neueren Forschungen ist ein Wechsel von der linken zur rechten Gehirnhälfte und umgekehrt das entscheidende Moment. Demnach wird in der rechten Gehirnhälfte parallel

und nonverbal verarbeitet, in der linken hingegen seriell und analytisch.

4. Überprüfung und Ausarbeitung:
   Nicht jeder als befreiend erlebte Einfall stellt wirklich eine ideale Problemlösung dar. Der Einfall muß auf seine Brauchbarkeit, Anwendbarkeit, Durchführbarkeit usw. geprüft werden. Es werden Implikationen und Konsequenzen berücksichtigt, die sich aus einer Realisierung der Idee ergeben.

Es erhebt sich nun die Frage, welche Fähigkeiten und welche Persönlichkeitsmerkmale diesen vorhin geschilderten kreativen Prozeß fördern können. Folgende Faktoren wurden in verschiedenen Untersuchungen als bedeutungsvoll erkannt:

1. Sensitivität:
   Die Fähigkeit, der materiellen und sozialen Umwelt mit einer offenen, kritischen Haltung gegenüberzutreten, Probleme und Verbesserungsmöglichkeiten, Widersprüche, Unstimmigkeiten und Neuigkeiten zu entdecken.

2. Geläufigkeit:
   Grad der Leichtigkeit, gespeicherte Information aus dem Gedächtnis abzurufen, indem es Wörter und Ideen zu produzieren gilt.

3. Flexibilität ist die Fähigkeit, Gegebenheiten umzustrukturieren und ein Problem von verschiedenen Seiten zu betrachten.

4. Originalität:
   Die Fähigkeit, ungewöhnliche Lösungsansätze und Ideen zu produzieren.

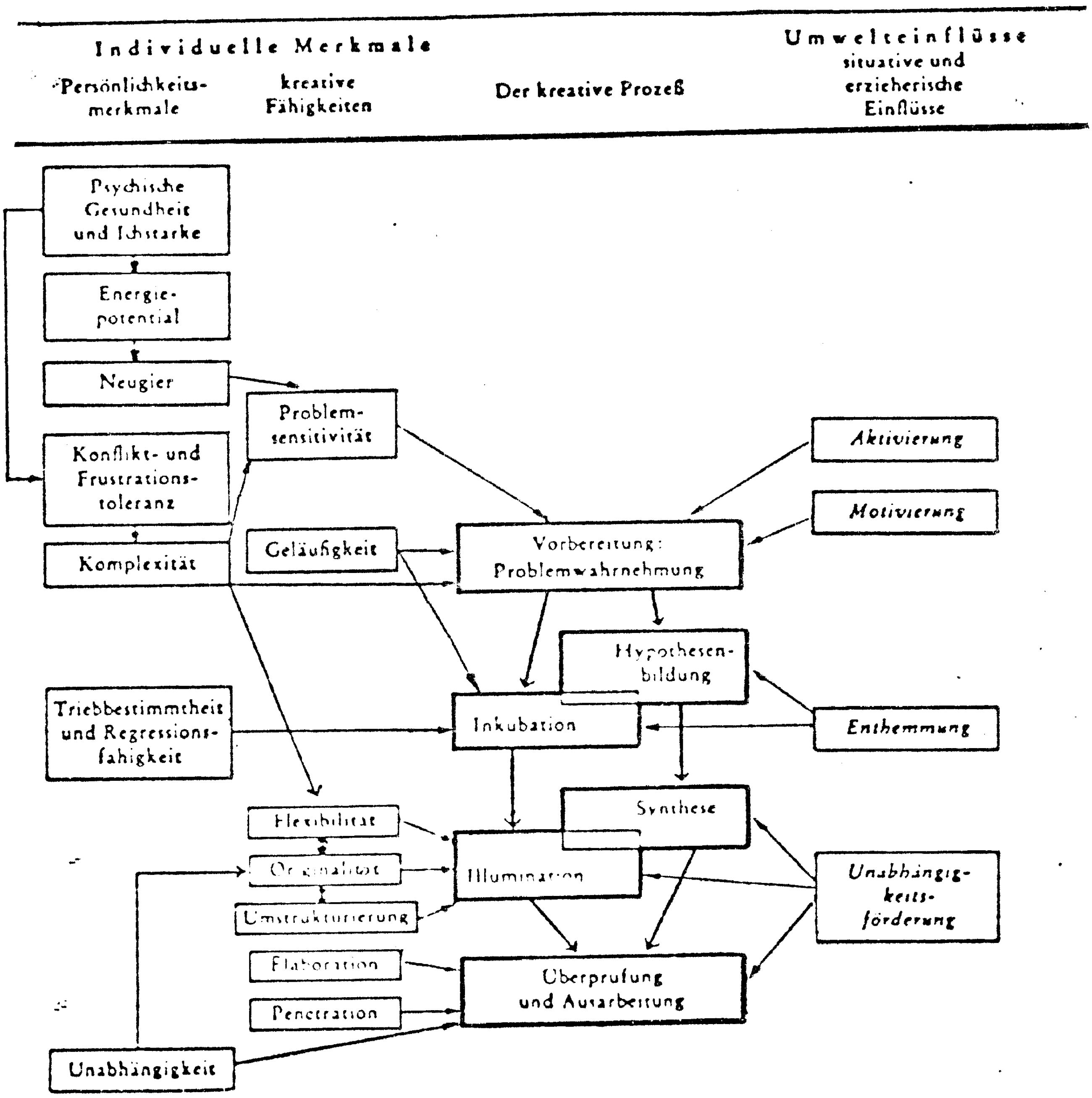
5. Umstrukturierung:
   Die Fähigkeit, Objekte oder deren Elemente in völlig neuer und ungewohnter Weise zu gebrauchen, ihre Funktion zu verändern, sie in neue Zusammenhänge zu stellen oder sie in einer neuen Gestalt anzuordnen.

6. Elaboration:
   Die Fähigkeit, nach gegebenen Informationen eine Struktur zu verwirklichen.

7. Penetration:
   Intensität und Gründlichkeit des Denkens; die Fähigkeit, nicht nur an der Oberfläche zu bleiben, sondern ein Problemgebiet zu durchdringen und dabei Transformationen zu erkennen.

Die folgende Grafik zeigt deutlich, wie diese Fähigkeiten für die einzelnen Phasen des kreativen Prozesses bedeutungsvoll sind. Sie werden dabei von verschiedenen Persönlichkeitsmerkmalen unterstützt, die teilweise auch Voraussetzungen für diese kreativen Fähigkeiten sind:

1. Psychische Gesundheit und Ichstärke:
   Genialität und Kreativität einerseits, Psychotizismus und Neurotizismus andererseits stehen nach weitverbreiteten Auffassungen miteinander in Beziehung. Es läßt sich aber die vermutete gegenseitige Abhängigkeit von Kreativität und Psychose sowie Neurotizismus nicht belegen, vielmehr liegt hier eine Mißdeutung des bei Kreativen häufig vom Normalen abweichenden Verhaltens vor (ULMANN, 1970, S.40). Psychische Gesundheit und Ichstärke ist im Gegensatz dazu eine kreativitätsfördernde Persönlichkeitsbedingung.



zwar soziale Sensibilität, haben aber geringe Interessen an sozialer Interaktion, sind reserviert, introvertiert und selbstgenügsam. Sie sind bisweilen ungehemmt und radikal und wehren sich gegen Unterdrückung und formale Normen. Kreative Schüler gelten deshalb oft als unsozial, unangepaßt und störend.

Diese einzeln angeführten Persönlichkeitsmerkmale und Fähigkeiten sind jedoch nicht voneinander unabhängig, sondern beeinflussen einander.

Ausgangspunkt einer zusammenhängenden Interpretation ist ein hohes Energiepotential als Voraussetzung für eine aktive und aufgeschlossene Auseinandersetzung mit der Umwelt. Denn dies bietet die Möglichkeit für eine Ansammlung von Wissen im Gedächtnis und für die Ausbildung intellektueller Fähigkeiten.

In einer absolut problem- und bedürfnisfreien Situation wird sich kein Problemlösungsverhalten entwickeln, sondern vielmehr Langeweile einstellen - sofern sich das Individuum nicht durch spontane Aktivität Spannungen verschaffen kann. Es scheint somit ein Optimum an Anregungen, Problemen, Konflikten und Frustrationen während der gesamten Entwicklung und im aktuellen kreativen Prozeß die beste Voraussetzung dafür zu bieten, daß weder unkontrollierte Triebhaftigkeit noch massive Triebunterdrückung das kreative Potential beeinträchtigen, sondern daß Konflikttoleranz, Komplexität und Unabhängigkeit ausgebildet werden, um eine uneingeschränkte Auseinandersetzung mit der Umwelt zu ermöglichen. Es wäre ein Fehler, Kreativität ausschließlich aus dem einzelnen Individuum heraus zu erklären. Auch die verschiedenen Umweltbedingungen haben wesentlichen Einfluß auf die Entwicklung der Kreativität. Die wichtigsten davon sind im folgenden angeführt:

1. Aktivierung:
   Wie schon früher erläutert, ist ein optimales Aktivierungsniveau, wie es durch sinnvolle äußere Anregungen hervorgerufen werden kann, am besten, damit ein Individuum sein nun vorhandenes Energiepotential auf die Umwelt richtet.
2. Enthemmung:
   Vielerlei Hemmungen entstehen im Laufe der Entwicklung durch Erfahrungen mit der Umwelt und insbesondere auch durch erzieherische Einflüsse. Kann sich das Individuum kontrolliert von einem Teil dieser Hemmungen frei machen, so tauchen Erinnerungen und Motive auf, die den Erfahrungsbereich vergrößern und neuartige Ideen und Assoziationen ermöglichen.

2. Energiepotential:
   Darunter versteht man ein Maß für die Gesamtheit aller Aktivitäten, die ein Individuum von sich aus produziert. Es ist verantwortlich für spontanes Verhalten von Individuen, aber auch für reaktive Verhaltensweisen; es bestimmt das Ausmaß an Interaktionen zwischen Person und Umwelt.
3. Neugier: Besonders wichtig für Kreativität ist das Neugier- oder Explorationsverhalten, da es eine intensive Auseinandersetzung mit der Umwelt bewirkt. So berichtet HOLLAND (1961, zitiert nach KRAUSE, 1977, S.187), daß die Väter von kreativen Kindern Neugier als wertvolle Eigenschaft schätzen.
4. Konflikt- und Frustrationstoleranz:
   Die vorhandene, freigesetzte und auf die Umwelt gerichtete Aktivität wird zwangsläufig mit Schwierigkeiten konfrontiert. Aktivitäten, wie die des lebhaften Kindes, stoßen auf Barrieren,Sanktionen und Strafen; die Umwelt erweist sich als konfliktträchtig, komplex, teilweise unüberschaubar und chaotisch. Der Versuch, neue Informationen in das bisherige Weltbild einzufügen, erscheint oft unmöglich: es entstehen kognitive Diskrepanzen, Konflikte und Frustrationen. Will der Mensch sein Energiepotential wirklich schöpferisch nutzen, dann muß er auch in der Lage sein, Konflikte, Frustrationen, Unsicherheit und Ungewißheit zu ertragen, ohne sofort zu resignieren oder sich mit oberflächlichen Lösungen zufriedenzugeben.
5. Komplexität:
   Eine realistische Sicht einer komplexen Umwelt, als Voraussetzung für realitätsangepaßte Problemlösungsvorschläge, ergibt sich nur, wenn die Person bereit ist, mehrdeutige Situationen voll zu akzeptieren, heterogene Aspekte des Problems gleichwertig nebeneinander stehen zu lassen und sich mit ihnen umfassend auseinanderzusetzen.
6. Triebbestimmtheit und kontrollierte Regressionsfähigkeit ermöglichen dem Kreativen einen kontrollierten Zugang zu elementaren Ebenen des Bewußtseins und der Motivation und setzen damit die durch das Energiepotential vorgegebenen Kräfte ohne unnötige Behinderung frei. Insbesondere in der Inkubationsphase ist das freie, emotionsgeladene Spiel mit unbewußten Assoziationen wesentlich.
7. Unabhängigkeit:
   Kreative zeigen häufig eine konstruktiv-kritische, mit den Verhältnissen unzufriedene, distanzierte bis aggressive Haltung. Sie beweisen

Diese Aufgabe hat auch einen offenen Anfangszustand, denn eigentlich wäre es besser, mit dem vollen Kübel einen kürzeren Weg zurückzulegen. Ist dann die Normale auf das Flußufer durch das brennende Haus die beste Verbindung? Nein, denn aus c) wird das Brechungsgesetz. Es ist natürlich schwerer, eine Aufgabe mit 10 verschiedenen Lösungsmöglichkeiten zu finden, als 20 Aufgaben, die alle nach der selben Art gerechnet werden. Aber einen Wald kennt man erst dann, wenn man ihn nicht nur auf dem selben Pfad durchquert, sondern viele verschiedene Wege sucht.

Auch GAGE und BERLINER führen an, daß der Lehrer dem Schüler Aufgaben stellen soll, die nicht nur eine richtige Lösung haben (1979, S.391), denn "somit lernt er nie, eine Methode gegenüber einer anderen abzuwägen. Ein Schüler kann nur dadurch lernen, gut zu beurteilen, wenn er die Auswirkungen einer schlechten Wahl sieht" (SAWYERS, S.61, 1964).

Bei obiger Aufgabe dient auch die Formulierung zur Motivation. Der Schüler soll an der Aufgabe Interesse gewinnen, er soll sie nicht wegen des Lehrerlobs oder gar aus Angst lösen.

Zum Typus der Aufgaben mit offenem Endzustand gehören auch alle Aufgaben, für die der Schüler den Lösungsweg erst finden muß, die nicht nach einem eintrainierten Algorithmus ablaufen, wie etwa die "13"-Aufgabe: Inwiefern sind alle sechsstelligen Zahlen von der Form 276 276, 591 591, 112 112 durch 13 teilbar? (DUNCKER, 1974, S.37) (Daß diese Aufgabe durch das Finden der richtigen Lösung auch einen bekannten Satz über Teilbarkeit einübt, ist ein günstiger Nebeneffekt).

2. Anfangszustand offen:

$2x+3y=8$ Welche Textaufgaben lassen sich für dieses Gleichungssystem finden?
$\underline{x+1y=9}$

Wie ändert sich der Aufgabentext, wenn man die Gleichungen ändert? Wie kann man sie abändern? (Etwa + gegen - tauschen, negative Zahlen im Lösungsdoppel etc.).

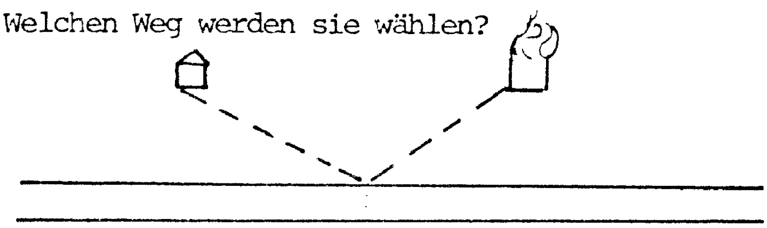
In der Volksschule heißt man das: Rechengeschichten erfinden. Auch Aufgaben wie etwa: "Denk dir eine Zahl, zähle drei dazu, verdopple das Ergebnis, zähle zwei weg und zähle das Zweifache der gedachten Zahl weg" lieben Kinder sehr und bemühen sich, Aufgaben ähnlicher Art zu finden. Je nachdem, auf welcher Stufe man das betreibt, kann man diese Aufgaben zur Einführung in die Algebra oder zum Erklären mathematischer Identitäten verwenden.

3. Motivierung:
   Eine sachbezogene, zielgerichtete Motivierung, wie sie etwa durch einen geschickten Pädagogen hervorgerufen werden kann, erleichtert vor allem in der Vorbereitungsphase den kreativen Prozeß.
4. Unabhängigkeitsförderung:
   Diese hilft dem Individuum, dem Konformitätsdruck standzuhalten und eigene ungewöhnliche Ideen zu produzieren. Gerade der Affekt der Scham, der in unseren Kulturen bei der Selbstdarstellung häufig auftritt, ist, wie KRAUSE (1977, S.109 f.) näher ausführt, für die Kreativität störend. Das Individuum muß weiters auch lernen, soziale Hierarchien zu hinterfragen.

3. Praktische Anwendungen

Ein wesentlicher Ansatzpunkt bei der Kritik war, daß das produktive Denken zu sehr vernachlässigt wird. Es ist nun sehr schwer, Aufgaben zu stellen, bei denen sowohl der Anfangs- als auch der Endzustand offen sind. Beides muß aber nicht geschlossen sein.

1. Endzustand offen:
   Dazu gehören alle Aufgaben, die mehrere Lösungswege zulassen, weil der Lösung im psychologischen Sinn der Lösungsweg im mathematischen Sinn entspricht. So ein Beispiel ist etwa:
   Die Bewohner eines Hauses, in dessen Nähe ein Fluß fließt, sehen, daß ein anderes Haus brennt. Sie wollen mit Kübeln helfen, das Feuer zu löschen. Welchen Weg werden sie wählen?



Relativ einsichtig ist es, daß man den kürzesten Weg Haus-Fluß-brennendes Haus wählen wird. Doch wie findet man den? Dazu gibt es eine Reihe von Lösungen, von denen einige angedeutet sind:

a) Extremwert-Aufgabe
b) die beiden Häuser sind Brennpunkte einer Ellipse, wovon der Fluß Tangente ist (daraus ergeben sich wieder mehrere Lösungsmöglichkeiten)
c) Reflexionsprinzip: Einfallswinkel = Ausfallswinkel
d) Spiegelung eines der Häuser am Fluß und Legen einer Geraden durch den Spiegelpunkt und dem anderen Haus.

3. Motivation:

Oben wurde bereits hingewiesen, daß Aufgaben nicht mit einem faden Text eingekleidet werden sollen. Man braucht schon ein hohes Abstraktionsvermögen, um Aufgaben wie etwa "Gegeben sind zwei Punkte A,B und eine Gerade g. Gesucht ist jener Punkt X auf g, damit die Summe der beiden Strecken $\overline{AX}$ und $\overline{BX}$ ein Minimum wird" interessant zu finden. Eine gut verpackte Aufgabe für Ungleichungen ist etwa folgendes Beispiel:

"Polizist Bobby, an sich ein gewitzter Kopf, war gestern zunächst der hellen Verzweiflung nahe. Er hatte fünf Kinder mit zur Wache genommen, die er bei einer Klingelpartie ertappt hatte. Auf seine Frage, wer ihr Anführer sei, antworteten ihm die Kinder, daß dies der Älteste von ihnen sei. Deshalb fragte er die Kinder nach ihrem Alter. Fein säuberlich schrieb er deren Aussagen auf:

1. Detlev: "Ich bin jünger als Eckhart"
2. Renate: "Ich bin älter als Detlev"
3. Nicole: "Ich bin jünger als Detlev"
4. Eckart: "Ich bin älter als Renate"
5. Alfred: "Ich bin jünger als Detlev"
6. Eckart: "Ich bin älter als Nicole"
7. Detlev: "Ich bin jünger als Renate"
8. Alfred: "Ich bin älter als Nicole"
9. Nicole: "Ich bin älter als Alfred"
10. Renate: "Ich bin älter als Alfred".

Zur Freude der Kinder merkte man Bobby an, wie er krampfhaft versuchte, Ordnung in die vielen Aussagen zu bringen; schließlich mußte er lächeln, denn jetzt wußte er, wer das älteste Kind und damit der Anführer war." (HORNSCHUH, 1975, S.66) (Lösung: Eckart).

Auch dieses Problem ist offen, denn die Schüler erkennen sehr schnell, daß das System überbestimmt ist, und sollten eigentlich fragen:

Welche Aussagen sind äquivalent?
Was ist das Minimalsystem für die Lösung?
Was ist es für die richtige Reihung?
Ist das System widerspruchsfrei? - usw.

Aber auch Aufgaben wie "Vier Kühe geben in vier Tagen vier Liter Milch. Wieviele Kühe geben dann in 16 Tagen 16 Liter Milch?" (HOCHKEPPEL, 1970, S.97) (Natürlich auch vier Kühe), oder "Welche Zahl muß man durch 7/8 teilen, um 8/7 zu erhalten?" (HOCHKEPPEL, 1970, S.45) (Natürlich 1) bestechen vor allem durch die Lösung. Man kann sie als Vorstufe zum produktiven Denken verwenden, weil man mit ihnen zeigen kann, daß es abseits der üblichen Lösungswege Abschneider gibt.

Zu diesem Typ gehört etwa auch die folgende Aufgabe (SAWYER, 1955, S.32f):
Suche die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} 6{,}751x + 3{,}249y &= 26{,}751 \\ 3{,}249x + 6{,}751y &= 23{,}249 \end{aligned}$$

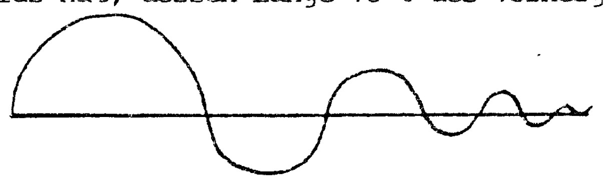
Erkennt ein Schüler die spezielle Anordnung der Koeffizienten, so kommt er durch Addieren und Subtrahieren der beiden Gleichungen wesentlich schneller und mit viel weniger Rechenarbeit zum Ziel. Er wird dadurch intrinsisch belobt.

Einfachere Aufgaben, an denen man zeigen kann, daß es sinnvoll ist, sich nicht auf eine Methode festzulegen, sind die bekannten Umfüllaufgaben von LUCHIN (s. etwa: GAGE und BERLINER, 1979, S.165f).

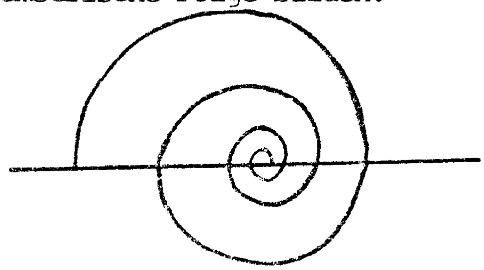
4. Flexibilität:
Diese Umfüllaufgaben werden bekanntlich als Maß für die Rigidität benutzt. Rigiden Personen fällt es schwer, von einer Methode zu einer anderen zu springen. Gerade Aufgaben, wie vorhin, motivieren sehr stark,einfachere Lösungswege zu suchen.

5. Penetration:
Um diesen Faktor zu fördern, kann man den Schülern mehrere Aufgaben stellen, wobei ihnen das Gemeinsame auffallen sollte. Ein einfaches Beispiel dafür ist:

a) Eine Schlange bestehe annähernd aus Halbkreisen, wobei jeder folgende Halbkreis einen Radius hat, dessen Länge 75 % des vorhergehenden Radius ist. Wie lang ist sie?



b) Gesucht ist die Länge einer aus Halbkreisen gebildeten Spirale, wenn die Halbmesser eine geometrische Folge bilden.



Gerade die Gruppentheorie liefert schöne Beispiele dafür, daß verschiedene Probleme dieselbe mathematische Struktur haben. Von SAWYER (1970, S.16ff) stammt folgende Problemserie:

1. Untersuche Addition und Multiplikation gerader und ungerader Zahlen. Man erhält dabei folgende zwei Gruppentafeln:

+	G	U
G	G	U
U	U	G

.	G	U
G	G	G
U	G	U

2. Man stelle sich folgende Verkehrssituation vor: eine enge Brücke mit automatischen Signalanlagen. Wenn ein Auto an die Brücke heranfährt, leuchtet ein Signal auf: "Straße frei!" Kommen aber von beiden Seiten Wagen zur Brücke, blinkt ein Warnsignal und etwa der Wagen am nördlichen Brückenende muß warten. Diese Schemen sehen folgendermaßen aus:

"Straße frei"-Signal:

		Wagen von N	
		nein	ja
Wagen	nein	nein	ja
von S	ja	ja	nein

Warnsignal:

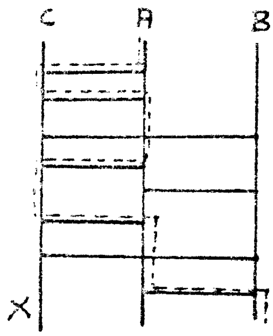
		Wagen von N	
		nein	ja
Wagen	nein	nein	nein
von S	ja	nein	ja

3. Und schließlich kann man noch fragen, wie das Schaltungsschema für obige Anlage aussehen muß.

Eine wesentlich tiefere Einsicht in Strukturen vermittelt folgende Aufgabe von GARDNER (1978, S.161ff), ergänzt durch zwei weitere:

a) Drei Programmierer- Abel, Becker und Crämer - wollen entscheiden, wer eine Runde Bier zu zahlen hat. Sie könnten natürlich eine Münze werfen oder etwas Ähnliches, entschließen sich aber stattdessen zu einer Zufallsentscheidung, die auf dem sogenannten "Durchlaufen eines Netzes" beruht. Einer von ihnen nimmt ein Blatt Papier, zeichnet drei senkrechte Striche darauf und markiert sie in irgendeiner ganz willkürlichen Reihenfolge mit den Buchstaben A, B und C. Danach knickt er das Blatt so, daß man die über den Strichen stehenden Buchstaben nicht mehr erkennen kann. Der Zweite trägt auf dem Blatt ebenso willkürlich eine Reihe von Querstrichen ein. Der Dritte fügt noch ein paar Querstriche hinzu und markiert dann eine der Senkrechten unten mit einem X.

   Der bisher ungeknickte obere Teil des Blattes wird jetzt wieder geglättet, so daß die Buchstaben A, B und C wichtsbar werden. Abel legt ein Finger auf die Senkrechte und folgt ihr abwärts. Überall, wo er auf den Endpunkt eines Querstriches stößt, folgt er dem Querstrich mit dem Finger bis zum anderen Endpunkt und geht von der Senkrechten, die durch diesen Punkt verläuft, weiter nach unten, bis er - nach einigem Hin und Her - ganz unten angekommen ist. Der von ihm durchlaufene



Weg endet nicht bei X, also braucht er diesmal nicht zu zahlen. Jetzt kommen Becker und Crämer, und Beckers Weg endet bei X; er muß also die Runde zahlen.

Bei diesen Beispiel erheben sich eine Reihe von Fragen:

1. Gibt es immer eine eindeutige Lösung?
2. Wenn man die Reihenfolge der Querstriche vertauscht, ändert sich das Ergebnis? usw.

b) Gesucht sei die Gruppe der Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks (LAUB, 1978, S.140ff).

c) Gesucht sei die Gruppe aus allen möglichen Permutationen dreier verschiedener Zeichen.

Auch hier drängen sich dem Schüler Fragen auf; insbesondere, was in der ersten Aufgabe den Drehungen und den Spiegelungen der zweiten Aufgabe entspricht. Es geht hier dabei nicht in erster Linie um das "Gemeinsamkeiten finden", sondern dadurch, daß dieselbe Aufgabe unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet wird, erkennt man eher die tiefliegende Struktur. Diese zu erkennen, ist aber ein Zeichen des "guten" Mathematikers, denn dem "guten" Mathematiker ... verbleibt eine abstraktere Schicht (als dem "schlechten"),... in der nur noch die spezifisch mathematischen Eigenschaften existieren (DUNCKER, 1974, S.134). Oder, wie es POINCARÉ ausdrückte: "Mathematik ist die Kunst, verschiedenen Dingen den gleichen Namen zu geben."

6. Querverbindungen:

Das Entdecken bzw.Entdeckenlassen von Querverbindungen, das Suchen danach schult wohl alle kreativen Fähigkeiten. Es soll daher immer nach Querverbindungen gefahndet werden, sowohl zwischen den einzelnen Teildisziplinen der Mathematik als auch zwischen anderen Fachgebieten und der Mathematik.

So können analytische Aufgaben auch trigonometrisch (der Winkel der Tangenten von einem Punkt an einem Kreis) oder aber auch mit Hilfe der Differentialrechnung gelöst werden usw. Aber auch Probleme, die mit der Physik, der Biologie oder mit der Philosophie ("Was sind Zahlen?") in Verbindung stehen, sollen gestellt werden. Ja, mehr noch, der Schüler soll dafür sensibel werden, sie zu entdecken. Nur dann ist der Schüler imstande, Mathematik auch anzuwenden.

7. Analytische und synthetische Fähigkeiten:
Zur Schulung dieser Fähigkeiten soll man den Schüler am Prozeß des Entstehens der Mathematik nicht nur teilhaben lassen, sondern sich bemühen, durch geeignete Hilfestellungen ihn wichtige Regeln selbst entdecken zu lassen. Das kann etwa geschehen, indem man die Dinge auch im geschichtlichen Zusammenhang darstellt (Querverbindungen!). Eine ausgezeichnete Hilfe dazu ist etwa KARLSON (1954). Aber auch durch geeignete Didaktik kann man dieses Ziel erreichen. Zwei aus SAWYERS (1964) ausgewählte Beispiele mögen dies zeigen:

1. (-1).(-1) = ?

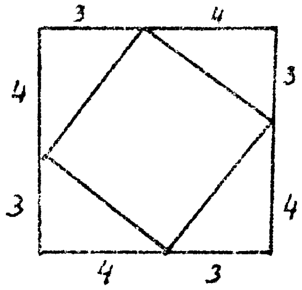
Um die Schüler das Ergebnis entdecken zu lassen, läßt er sie eine Multiplikationstabelle aufstellen:

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
4	-16	-12	-8	-4	0	4	8	12	16
3	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12
2	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1					0	-1	-2	-3	-4
-2					0	-2	-4	-6	-8
-3					0	-3	-6	-9	-12
-4					0	-4	-8	-12	-16

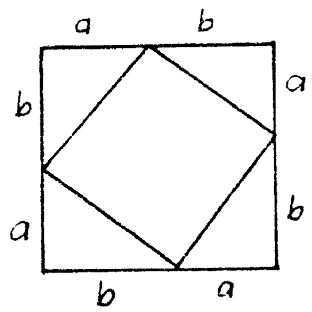
Und fast jeder Schüler wird dieses "Muster" richtig ergänzen und dabei die Regel für - mal - entdecken.

2. Pythagoräischer Lehrsatz.

Geg.:



Berechne die Größe des eingeschriebenen Quadrates! ($7.7 - 4.\frac{4.3}{2} = 25$) und weitere Beispiele.



Und schließlich:

$$(a + b)^2 - 4.\frac{a.b}{2} = \underline{\underline{a^2 + b^2 = c^2}}$$

Aber auch durch geeignete Unterrichtsführung kann man viel zur Schulung dieser Fähigkeiten beitragen:

1. Schätzen lassen. Denn "es ist gut für Kinder, wenn sie ein Gefühl für die Größe von Dingen bekommen." (SAWYER, 1964, S.21)
2. Auch "Raten" ist ein Weg des Denkens ..., Mathematiker erraten gewöhnlich die Lösungen ihrer Probleme. Systematische Lösungsmethoden sind erst notwendig, wenn die Probleme zu kompliziert sind, um die Lösung zu erraten. (SAWYER, 1964, S.60)
3. Anschaulich werden. Nicht umsonst waren Arithmetik und Geometrie die Grundpfeiler der Mathematik. Beide Gehirnhälften sollen bei der Lösung mathematischer Probleme aktiviert werden.
4. Nicht mit Definitionen beginnen. "Wir geben auch Kleinkindern nicht eine wissenschaftliche Definition von "Hund" - aber Kleinkinder wissen, was ein Hund ist. Der beste Weg, um Kinder in die Algebra einzuführen, ist, ihnen zu zeigen, wie man Algebra macht. (SAWYER, 1964, S.44). So stellt der Schüler selbst Hypothesen für die Begriffe auf.
5. Nicht unbedingt auf jeden Fehler aufmerksam machen, sondern den Schüler so weit bringen, daß er lernt, wie man eine Rechnung prüft. Denn "in fast jedem Land der Welt kann man Studenten finden, die erfreut kompletten algebraischen Unsinn niederschreiben. Ich meine nicht Flüchtigkeitsfehler, wie sie jeder von uns macht, die er aber erkennt, wenn er die Rechnung kontrolliert. Aber einen Gegenstand so zu lernen, daß man Unsinn schreibt und glücklich darüber ist und vorbereitet ist, damit zu leben, - das ist eine arge, überaus unglückliche, aber nicht ungewöhnliche Methode. Die Wurzel des Übels ist, daß Studenten sich nicht verantwortlich fühlen für das, was sie schreiben oder sagen. Sie meinen, daß der Lehrer für die Richtigkeit einer Information verantwortlich ist. Der Student ist nur für das Wiederholen dessen, was der Lehrer sagt, verantwortlich. In einigen Fächern mag das so sein ...; aber Mathematik ist oder sollte der demokratischeste Gegenstand der Welt sein, denn in

der Mathematik gibt es keinen Beweis, der nur für den Lehrer, aber nicht dem Schüler verfügbar ist ... Wenn Schüler einen Fehler machen, sollte der Lehrer sie nicht darauf aufmerksam machen, sondern sie auffordern: "Wie kann man das überprüfen?" (SAWYER, 1964, S.81f).

6. Auch nicht jede Frage muß beantwortet werden. Meist genügt es, dem Schüler Hinweise zu geben, daß er selbst die Lösung findet.

7. Allerdings darf nicht darauf vergessen werden, daß "bei allen anerkannt schöpferischen Leistungen auf wissenschaftlich-künstlerischem Gebiet jeweils umfangreiche Übungsaktivitäten vorausgingen, zu denen die Umwelt nicht selten schon während der Vorschulzeit angeregt hatte. Auch die Analyse der Vorgeschichte hervorragender Entdeckungen ergibt, daß erst die intensive und langdauernde Beschäftigung mit einem Problem schließlich zu dem "glücklichen" Einfall führte" (MIETZEL, 1975, S.285). Es wird daher auch in der Mathematik nach wie vor notwendig sein, die Rechenregeln und Lehrsätze zu beherrschen, ob es sich nun um Addieren von Brüchen, Auflösen von Gleichungen oder um Formeln der Integralrechnung handelt. Das handwerkliche Können muß da sein! Ist das der Fall, dann können durch geschickte Aufgabenstellungen und die geeignete Klassenatmosphäre kreative Fähigkeiten geschult werden.

8. Kreativitätstechniken (Brainstorming):
Dabei werden die Schüler aufgefordert, zu einem spezifischen Problem möglichst viele Einfälle zu produzieren. In dieser Phase ist jede Bewertung eigener oder fremder Gedanken verboten ... Man soll Ideen anderer Gruppenmitglieder aufgreifen, verbessern und kombinieren, jedoch keinesfalls kritisieren ... In einer anschließenden Bewertungsphase werden die einzelnen, zuvor protokollierten Ideen bewertet und auf Brauchbarkeit, Anwendbarkeit und Schwierigkeit hin überprüft. (PREISER, 1976, S.96f).

Daß dieses Verfahren brauchbar ist, untersuchten PARNES und MEADOW experimentell und zeigten, daß"die brainstorming-Instruktion ...,zu einer Vermehrung ... der brauchbaren Gedanken führte" (KLAUER, 1977, S.23). Im Mathematikunterricht kann dieses Verfahren etwa folgendermaßen eingesetzt werden: Es sollen etwa Lösungsmöglichkeiten für $x^2 - 3x - 4 = 0$ gesucht werden (- wobei die Lösungsformel für quadratische Gleichungen nicht bekannt sein soll). Aus Erfahrung weiß der Verfasser, daß dabei grafische Lösungsmethoden, iterative Methoden, aber auch sinnvolle Ansatzpunkte für das Auffinden der Lösungsformel von den Schülern entdeckt werden.

9. Soziales Klima.

Noch so gut ausgedachte Aufgaben und ausgeklügelte Kreativitätstechniken sind wirkungslos, wenn das Verhalten des Lehrers und das soziale Klima hemmend für die Entwicklung der Kreativität ist. In der Schule soll nicht der tierische Ernst vorherrschen, denn "eine Stunde, in der nicht gelacht wurde, ist eine verlorene Stunde", wie einmal treffend ein weiser Schulmann (ich glaube, es war Hofrat Dir.Dr.ZWÖLFER) bemerkt hat. Der Schüler muß sich in seinen Problemen verstanden und vom Lehrer akzeptiert fühlen, egal, ob es um menschliche oder fachliche Probleme geht.

Will man kreatives Verhalten fördern, so muß man die vom Schüler kommenden Ideen aufgreifen, dann darf man aber auch nicht an starren Unterrichtszielen festhalten, da sich Unterrichtsziele "gegenbenenfalls erst während des Unterrichts für notwendig erweisen" (SCHIER und LODDENKEMPER, 1980, S.90). Der Lehrer muß flexibel sein und bereit, zu improvisieren. Er muß sich auch zurückhalten können und darf den Schüler mit seinem Wissen nicht erschlagen. Das ist sehr schwer, weil es "wohl gegenwärtig zu den Rollenbeschreibungen des "guten Lehrers" gehört, daß er auf alles eine Antwort weiß, was für die Einübung der Lösung komplexer und kreativer Prozesse sehr störend ist, und in den Schülern die Haltung erzeugt, es gäbe für alles eine bereits vorformulierte Lösung, vorausgesetzt, man kämme an die richtige Quelle heran" (KRAUSE, 1977, S.178). Vor allem muß er aber auch beachten, daß "kreative Schüler nicht immer so sind, wie wir das gerne möchten. Das ist nicht nur ihrer Unabhängigkeit in Situationen, in denen nichtkonformes Verhalten die Arbeit anderer Schüler enrsthaft stören kann, zuzuschreiben, sondern das kommt auch daher, daß sie ... mehr als andere Menschen große Spannungen erleben, die der Reichhaltigkeit ihrer Erfahrungen und den starken Gegensätzen ihres Wesens entstammen." (MAC KINNON, 1962, S.459, zitiert nach GAGE und BERLINER, 1979, S.391).

Der Lehrer soll aber nicht nur bereit sein, neue Ideen zu akzeptieren, sondern auch selbst mit neuen zu kommen. Er muß also kreativ sein, denn "Kreativitätsförderung setzt kreative Lehrer voraus" (PREISER, 1976, S.20).

LITERATURVERZEICHNIS

DUNKER, K.: Zur Psychologie des produktiven Denkens. Dritter Neudruck. Springer-Verlag, Berlin, 1974.

GAGE, L. u. BERLINER, C.: Pädagogische Psychologie. Urban u. Schwarzenberg, München, 1979.

GARDNER, M.: Kopf oder Zahl? Spektrum d. Wissenschaft, Weinheim, 1978.

HOCHKEPPEL, W.: Denken als Spiel. Langewiesche-Brandt, München, 1976.

HORNSCHUH, H.-D.: Eulenspiegels mathematische Streiche. Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, 1975.

KARLSON, P.: Du und der Zauber der Zahlen. Ullstein Verlag, Berlin, 1954.

KLAUER, K.J.: Das Experiment in der pädagogischen Forschung. Pädagogischer Verlag Schwann, Düsseldorf, 1977.

KONECNY, E.: Psychologie. 4.Auflage, Wilh.Braumüller, Wien, 1978.

KRAUSE, R.: Produktives Denken bei Kindern. Beltz Verlag, Basel, 1977.

LAUB, J.: Lehrbuch der Mathematik, 1.Bd. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1978.

MIETZEL, G.: Pädagogische Psychologie. 2.Aufl. Hogreve, Göttingen, 1975.

NEISSER, U.: Kognitive Psychologie. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1974.

PREISER, S.: Kreativitätsforschung. Wiss.Buchges.Darmstadt, 1976.

SAWYER, W.W.: Prelude to Mathematics. Penguin Books Ltd., Harmandsworth, Middlesex, 1955.

Vision in Elementary Mathematics. Penguin Books Ltd., Harmandsworth, Middlesex, 1964.

Eine konkrete Einführung in die abstrakte Algebra. Hochschultaschenbücher Verlag, Mannheim, 1970.

SCHIER, N. u. LODDENKEMPER, H.: Schule als Instanz sozialer und kreativer Lernprozesse. Ernst Reinhardt Verlag, München, 1980.

ULMANN, G.: Kreativität. Beltz Verlag, Basel, 1970.

Kreativitätsförderung. Kiepenheuer und Witsch, Köln, 1973.